


# Un modèle global avec quantité de biomasse inaccessible liée aux conditions environnementales : application aux données de la pêche ivoiro-ghanéenne de *Sardinella aurita*

 Francis Laloë

Chercheur ORSTOM affecté au Centre de Recherches océanographiques  
de Dakar-Thiaroye, B.P. 224, Dakar (Sénégal).  
Adresse actuelle : Statistique-Mathématique, Bât. 425, Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex (France).

Reçu le 2 mai 1988, accepté le 10 octobre 1988.

---

*A surplus production model with unaccessible quantity of biomass depending on environmental conditions.  
Application to data from Sardinella aurita fishery in Ivory Coast and Ghana.*

Laloë F., *Aquat. Living Resour.*, 1988, 1, 289-298.

## Abstract

It is generally assumed, when using a surplus production model, that production of biomass is described as a function of exploited biomass. If a constant quantity of biomass is unaccessible, this assumption may be false. We propose here two formulations of production models assuming the existence of a quantity of unaccessible biomass. When this quantity change during the history of a fishery, such models may be useful. Using environmental data in Ivory Coast, this approach describes the fishery of *Sardinella aurita* in Ivory Coast and Ghana from 1966 to 1980. The suggested adjustments are effective but they do not allow us to choose between the two formulations, each of them leading to different conclusions for stock management.

**Keywords :** Surplus production models, relations between fishery and environment.

## Résumé

Les modèles globaux utilisés pour décrire la dynamique des populations marines exploitées supposent en général que la production de biomasse peut être décrite par une fonction de la seule biomasse exploitée. Si une certaine quantité de biomasse reste inaccessible à la pêche, cette hypothèse n'est pas vérifiée. Nous étudions dans cet article des modèles supposant l'existence d'une telle quantité. Lorsqu'au cours de l'histoire d'une pêche cette quantité de biomasse inaccessible a pu se modifier, de tels modèles peuvent être utiles. En utilisant des données d'environnement en Côte-d'Ivoire, cette approche est utilisée ici pour décrire la pêche du stock ivoiro-ghanéen de sardinelles rondes *Sardinella aurita* de 1966 à 1980. Les ajustements réalisés sont satisfaisants, mais ils ne permettent pas de choisir entre deux formulations proposées, qui conduisent à des conclusions différentes en matière de gestion du stock.

**Mots-clés :** Modèles globaux, relations pêche-environnement.

---

## INTRODUCTION

Dans une étude de la pêche ivoiro-ghanéenne de sardinelles rondes (*Sardinella aurita*), Binet (1982) a montré que les captures considérables réalisées en 1972, suivies d'un effondrement au cours des années

Tableau 1. — Données annuelles de prises, efforts standardisés et débits des fleuves (voir le texte pour les sources utilisées).

Annual catch, standardized effort and river flow (data used by Fréon, 1986).

Année	Prise (t)	Effort standardisé	Débit (m <sup>3</sup> .s <sup>-1</sup> )
1966	15 300	1 820	627
1967	43 700	3 180	424
1968	8 600	1 530	1 091
1969	29 200	6 660	499
1970	30 400	6 750	540
1971	36 100	9 370	364
1972	95 400	11 980	176
1973	5 500	12 880	256
1974	1 940	4 960	370
1975	2 070	11 620	335
1976	15 500	6 610	197
1977	17 100	3 880	266
1978	51 000	4 180	124
1979	13 300	3 220	511
1980	23 800	3 980	242

suivantes (tabl. 1) pouvaient s'expliquer par la sécheresse de 1972. Ces explications ont été reprises par Gulland et Garcia (1984) et étayées par Fréon (1986).

Binet (1982) indique que les modèles globaux ne peuvent pas rendre compte de ce type de phénomènes. Fréon (1986) a proposé un modèle global incluant une relation entre le débit des fleuves et la capturabilité et prenant en compte l'influence de l'upwelling sur la production. Il obtient ainsi un ajustement satisfaisant, mais en excluant les résultats des années de reconstitution du stock (1974 à 1977) dont le modèle ne peut rendre compte. Cury et Roy (1987) ont également montré, à partir des données concernant l'ensemble des espèces pélagiques côtières pêchées en Côte-d'Ivoire, que l'introduction des données d'upwelling dans la formulation des modèles globaux améliore notablement leur qualité.

Nous présentons dans ce travail, un modèle global simple supposant l'existence d'une certaine quantité de biomasse inaccessible à la pêche, quantité pouvant dépendre des conditions environnementales.

## PRÉSENTATION DU MODÈLE

L'approche globale classique de la dynamique des populations marines exploitées consiste à décrire l'état de la population par une valeur, une biomasse ( $B_t$ ) dont l'évolution dans le temps est supposée dépendre d'une part de l'impact de la pêche représenté comme une fonction  $c(B_t, f_t)$  de la biomasse exploitée et de

l'intensité d'effort, et d'autre part de facteurs non directement liés à la pêche et dont l'effet est représenté par une fonction  $p(B_t)$  de la biomasse. On écrit donc :

$$dB_t/dt = p(B_t) + c(B_t, f_t).$$

Le modèle le plus « simple » est ainsi celui de Graham-Schaefer (Graham, 1935; Schaefer, 1954, 1957) :

$$dB_t/dt = B_t \cdot H \cdot (B_t - B_0) - q \cdot f_t \cdot B_t$$

généralisé par Pella et Tomlinson (1969) :

$$dB_t/dt = B_t \cdot H \cdot (B_t^{m-1} - B_0^{m-1}) - q \cdot f_t \cdot B_t$$

avec, lorsque  $m \rightarrow 1$  le modèle « logarithmique » (Garrod, 1969; Fox, 1970) :

$$dB_t/dt = B_t \cdot H \cdot [\text{Log}(B_t) - \text{Log}(B_0)] - q \cdot f_t \cdot B_t$$

Dans ces formules,  $B_t$  et  $f_t$  sont la biomasse et l'effort instantané au temps  $t$ . Les paramètres des modèles sont la capturabilité «  $q$  », probabilité pour une unité de biomasse d'être capturée lorsqu'une unité d'effort est déployée; «  $B_0$  » la biomasse « vierge », biomasse à l'équilibre lorsque l'effort est nul, et les paramètres  $H$  et  $m$  qui rendent compte de la vitesse de convergence vers l'équilibre lorsque celui-ci n'est pas réalisé.

Dans toutes ces équations, il est donc supposé que la capture est proportionnelle à l'effort et à la biomasse, ce qui implique que cette biomasse soit la biomasse exploitée (voir par exemple Laurec et Le Guen, 1981), ou une quantité qui lui soit proportionnelle. Ainsi, en écrivant que le taux de renouvellement de la population est égal à :

$$H \cdot (B_t^{m-1} - B_0^{m-1})$$

on suppose qu'il est une fonction des paramètres du modèle et de cette même biomasse « exploitée ». Si celle-ci n'est qu'une partie de la biomasse qui participe au renouvellement de la population, un modèle global risque de ne pas décrire convenablement l'évolution de la biomasse du stock et des captures réalisées. Dans cet esprit, des adaptations ont été faites pour tenir compte du fait que la biomasse de poissons recrutés dépend de celle des reproducteurs présents au moment de leur naissance (modèles avec délais, Walter, 1973; Marchesseault *et al.*, 1976).

À partir des remarques qui précèdent, nous avons modifié l'équation du modèle de Graham-Schaefer en écrivant :

$$dB_t/dt = B_t \cdot H \cdot (B_t - B_0) - q \cdot f_t \cdot (B_t - \alpha \cdot B_0) \quad (1)$$

où  $\alpha \cdot B_0$  est une quantité donnée de biomasse, exprimée par une fraction de la biomasse vierge du stock, inaccessible à la pêche.

Fox (1974) a étudié un modèle considérant l'existence de deux stocks exploités, avec des taux d'échange de biomasse d'un stock vers l'autre pouvant être différents. La formulation (1) peut être considérée

comme pouvant décrire une telle situation dans le cas très particulier où seul l'un des deux stocks est exploité et où les échanges ne peuvent se faire qu'à son profit, la biomasse du stock non exploité restant quant à elle constante.

L'équation (1) est très simple et peut être adaptée pour tenir compte, en fonction des cas étudiés, des caractéristiques de la ressource et de la nature de son exploitation. Par exemple, si on suppose qu'une certaine quantité de biomasse reste inexploitée parce que la pêcherie ne fréquente pas l'aire de répartition de l'espèce dans son ensemble, la densité ne sera pas uniformément affectée par la pêche. On peut supposer qu'à un déficit donné ( $B_p - B$ ) de biomasse, la production sera d'autant plus importante que ce déficit sera plus uniformément réparti sur l'ensemble de la zone. En ce sens on peut adapter l'expression (1) en considérant que le paramètre  $H$ , et donc la productivité du stock, devient une fonction de  $\alpha$  :  $H(\alpha) = H \cdot (1 - \alpha)$ , pour obtenir :

$$dB_t/dt = B_t \cdot H \cdot (1 - \alpha) \cdot (B_t - B_p) - q \cdot f_t \cdot (B_t - \alpha \cdot B_p) \quad (2)$$

D'autres adaptations peuvent être formulées, en introduisant par exemple une relation entre la capturabilité et le paramètre  $\alpha$  :  $q(\alpha) = q/(1 - \alpha)$ , lorsque les variations de  $\alpha$  sont dues à des modifications de la surface prospectée par la pêcherie comme ce peut être le cas pour la pêcherie d'albacore de l'Atlantique Centre Est (Laloë, 1987).

Certaines caractéristiques des modèles régis par les expressions (1) et (2) sont décrites en annexe. On observe en particulier que les familles de relations à l'équilibre entre prises et efforts, obtenues en faisant varier le paramètre  $\alpha$  sont analogues à celles obtenues en faisant varier le paramètre  $m$  dans le modèle global généralisé (fig. 1). La principale différence entre les modèles issus des équations (1) et (2) concerne les relations entre la PME (prise maximum équilibrée) et le paramètre  $\alpha$ . Ces formulations ne sont donc pas de prime abord de nature à améliorer les possibilités des modèles existants, mais elles font apparaître la difficulté d'interprétation des modèles globaux en général puisqu'on peut rendre compte de situations diverses en faisant des hypothèses, soit sur la façon dont le stock se renouvelle, soit sur l'évolution de la capturabilité en fonction de la biomasse (cf. annexe, 1<sup>re</sup> partie). Ceci indique également la souplesse du modèle global généralisé de Pella et Tomlinson, et son aptitude à rendre compte de différents phénomènes.

Lorsqu'on effectue un ajustement à partir d'un modèle global, on suppose que les paramètres du modèle sont restés constants tout au long de l'histoire de la pêcherie étudiée. Il est probable que cette hypothèse ne soit pas toujours vérifiée et lorsque des modifications de la pêcherie sont susceptibles d'être décrites par des modifications du paramètre  $\alpha$  dans les équations (1) ou (2), les modèles qui en découlent peuvent alors devenir intéressants. C'est peut-être le cas pour la pêcherie ivoiro-ghanéenne de sardinelles rondes.

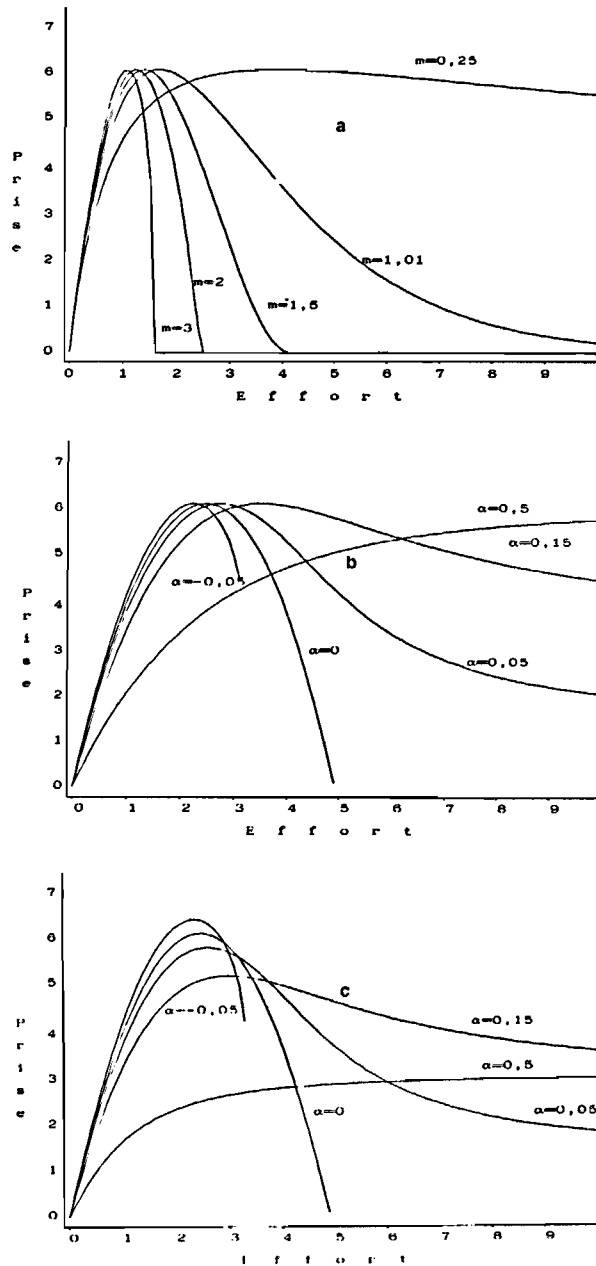


Figure 1. — Relations à l'équilibre entre prises et efforts (unités arbitraires) pour différents modèles globaux : (a) Modèle généralisé de Pella et Tomlinson avec différentes valeurs de  $m$ . (b) Modèle déterminé par l'équation 1 avec différentes valeurs de  $\alpha$ . (c) Modèle déterminé par l'équation 2 avec différentes valeurs de  $\alpha$ .

Equilibrium Catch Effort relationships (arbitrary units) from different surplus Production Models: (a) generalized Pella and Tomlinson model with different values of  $m$ . (b) Model corresponding to equation 1 with different values of  $\alpha$ . (c) Model corresponding to equation 2 with different values of  $\alpha$ .

#### APPLICATIONS AUX RÉSULTATS DE LA PÊCHERIE IVOIRO-GHANÉENNE DE SARDINELLES RONDÉS

Les données que nous utiliserons ici (tabl. 1) sont une partie de celles traitées par Binet (1982) et Féron

(1986). Elles concernent les statistiques de pêche (prises et efforts; FAO, 1980) et les mesures de débits des fleuves (service hydrographique de l'ORSTOM) de 1966 à 1980. Nous n'avons pas utilisé les données sur l'intensité de l'upwelling.

Binet (1982) a expliqué comment la disponibilité des sardinelles rondes peut s'accroître lorsque l'upwelling est fort (provoquant une migration des individus vers la surface) et lorsque le débit des fleuves est faible (ce qui ne provoque pas l'apparition de zones de dessalure à la côte, zones évitées par les sardinelles rondes). La très forte capture réalisée en 1972 peut alors s'expliquer par un afflux d'individus vers la côte, individus qui seraient restés inaccessibles « en temps normal ». On peut alors envisager d'introduire dans une modélisation globale de la dynamique du stock, une quantité de biomasse inaccessible d'importance liée au débit des fleuves. La relation entre la quantité de biomasse inaccessible [ou le paramètre  $\alpha$  dans les équations (1) ou (2)] et le débit des fleuves peut avoir des formes diverses. Après plusieurs tentatives infructueuses avec des relations linéaires ou polynômiales et en considérant que l'importance des captures réalisées en 1972 et l'ampleur de leur effondrement ultérieur peuvent indiquer qu'un événement « exceptionnel » s'est produit, nous avons choisi une relation comportant un « effet seuil ». Nous avons ainsi supposé tout d'abord que toute la biomasse exploitable était accessible en 1972. On observe (tabl. 1) que les débits des fleuves ont été faibles en 1972, mais que le minimum a été atteint en 1978, nous avons donc supposé que le même phénomène s'est reproduit cette année-là. Pour toutes les autres années, nous avons supposé qu'une proportion  $\alpha$ , constante, de la biomasse vierge était inaccessible à la pêche.

Pratiquer ainsi revient à faire un premier ajustement, « à l'œil », pour déterminer un seuil qui est donc un des paramètres du modèle. L'équation générale peut donc s'écrire :

— A partir de l'équation (1) (Modèle { M1 } ) :

$$dB_i/dt = B_i \cdot H \cdot (B_i - B_v) - q \cdot f_i \cdot B_i$$

si débit < 180 (1972, 1978)

{ M1 }      sinon

$$dB_i/dt = B_i \cdot H \cdot (B_i - B_v) - q \cdot f_i \cdot (B_i - \alpha \cdot B_v)$$

(avec la contrainte  $q=0$  si  $B_i < \alpha \cdot B_v$ ).

— A partir de l'équation (2) (Modèle { M2 } ) :

$$dB_i/dt = B_i \cdot H \cdot (B_i - B_v) - q \cdot f_i \cdot B_i$$

si débit < 180 (1972, 1978)

{ M2 }      sinon

$$dB_i/dt = B_i \cdot H \cdot (1 - \alpha) \times (B_i - B_v) - q \cdot f_i \cdot (B_i - \alpha \cdot B_v)$$

(avec la contrainte  $q=0$  si  $B_i < \alpha \cdot B_v$ ).

## Ajustements

Pour ajuster ces modèles, nous avons supposé que la biomasse vierge du stock est de 150 000 t, valeur fixée arbitrairement en considérant que les 95 000 t capturées en 1972 représentent une certaine fraction de la biomasse vierge, additionnée de la prise habituellement réalisée; d'autre part, pour une espèce de courte durée de vie, on peut supposer que  $B_v$  ne peut être que d'un ordre de grandeur limité par rapport à la prise maximale à l'équilibre.

Nous avons d'abord fait les calculs sous l'hypothèse que la biomasse au début de 1966 était égale à la biomasse vierge, puis sous l'hypothèse qu'elle était égale à :

$$\alpha \cdot B_v + 0,5 \cdot (1 - \alpha) \cdot B_v$$

hypothèses correspondant à une pêcherie débutant (1<sup>er</sup> cas) ou à une pêcherie déjà active (2<sup>e</sup> cas). Les paramètres estimés sont donc la capturabilité, prise maximale à l'équilibre (PME), et la proportion  $\alpha$  de la biomasse vierge inaccessible lorsque le débit des fleuves est supérieur à 180. Nous avons recherché les valeurs des paramètres qui minimisent la somme :

$$\sum_i (P_i - \hat{P}_i)^2$$

où  $P_i$  et  $\hat{P}_i$  sont les prises observées et ajustées pour l'année  $i$ . En général on minimise de préférence la somme :

$$\sum_i [(P_i - \hat{P}_i) / \hat{P}_i]^2$$

ce qui permet de rechercher la minimisation des erreurs relatives et non absolues (Rivard et Bledsoe, 1978). Dans notre cas, de faibles captures une année donnée peuvent être obtenues par le produit  $q \cdot f \cdot (B_m - \alpha \cdot B_v)$  où  $B_m$  est la biomasse moyenne de l'année. L'écart entre la prise observée et la prise ajustée n'est donc pas proportionnel à la biomasse réellement présente mais à la différence entre cette biomasse et une fraction peut-être importante de la biomasse vierge. Une légère variation de  $B_m$  pourra alors se traduire par une grande variation du terme :

$$[(P_i - \hat{P}_i) / \hat{P}_i]^2$$

sans relation avec l'efficacité du modèle. Ceci est particulièrement évident si la biomasse est toujours restée inférieure à  $\alpha \cdot B_v$ , auquel cas la prise ajustée étant nulle, le terme ci-dessus sera indéfini.

Les résultats des estimations des paramètres obtenues avec les modèles { M1 } et { M2 } sont présentées dans le tableau 2. On constate que les hypothèses faites sur la biomasse initiale n'ont pratiquement pas d'effet, dans le cas présent, sur l'estimation des différents paramètres et que tous les ajustements ont la même qualité. Nous avons présenté les résultats de l'ajustement réalisé avec le modèle { M1 } sous l'hypothèse d'une biomasse initiale égale à la biomasse

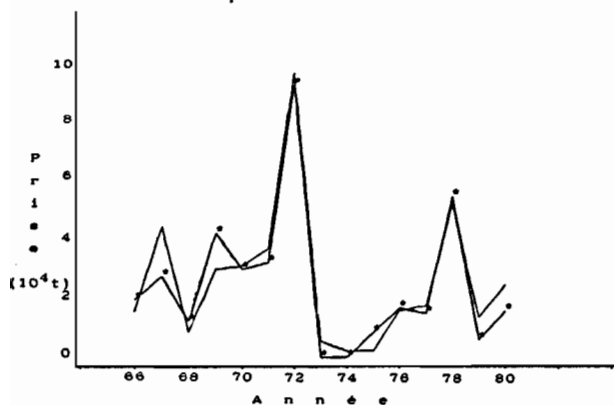


Figure 2. — Prises observées et ajustées (\*) par le modèle {M1} sous l'hypothèse  $B_0 = B_p$ .

Observed and fitted (\*) catches with model {M1} under  $B_0 = B_p$  assumption.

viège sur les figures 2 (prises observées et prises ajustées) et 3 (évolution de la biomasse et des captures),



Figure 3. — Biomasse totale et captures (par cinquième d'année) de 1966 à 1980 estimées avec le modèle {M1} sous l'hypothèse  $B_0 = B_p$ .

Total biomass and catches (per fifth of years) from 1966 to 1980 estimated with model {M1} under  $B_0 = B_p$  assumption.

les figures obtenues avec les autres ajustements sont pratiquement identiques.

Les pourcentages de variance expliquée (tabl. 2) ont été calculés par la formule :

$$100 \left\{ 1 - \frac{\sum_i (P_i - \bar{P})^2}{\sum_i (P_i - \hat{P})^2} \right\},$$

où  $\bar{P}$  est la moyenne des captures annuelles.

Les relations prise-effort à l'équilibre pour les modèles {M1} et {M2}, correspondant dans chaque cas aux situations d'accessibilité totale ou non de la ressource, sont présentées sur la figure 4.

## DISCUSSION

On constate que les fortes captures réalisées en 1972 et 1978 sont bien prises en compte par les ajustements, ce qui est « normal » étant donné le critère choisi pour l'ajustement. Le point important est la bonne description des prises effectuées au cours de la période 1973-1976, période au cours de laquelle le stock s'est « reconstitué ». Ce résultat est ici obtenu grâce au fait que la biomasse est supposée être restée entièrement inaccessible tant qu'elle est restée inférieure à la valeur  $\alpha \cdot B_p$ . Si le phénomène de « totale accessibilité du stock » s'est produit à deux reprises, les conséquences en furent différentes. La grande activité de la pêcherie, pendant l'année 1972, a réduit la biomasse à un niveau inférieur à  $\alpha \cdot B_p$ , niveau atteint à nouveau, après plus de 2 années. En 1978, l'effort de pêche relativement réduit n'a pas conduit au même résultat, ce qui a pu faire penser que le phénomène ne s'est pas renouvelé avec la même intensité. Nos résultats ne démontrent pas que le phénomène se soit bien reproduit, mais ils indiquent qu'il s'agit d'une hypothèse plausible.

Si les différents ajustements conduisent à des pourcentages de variance expliquée équivalents, ils ne conduisent pas aux mêmes interprétations.

Avec le modèle {M1}, la PME est un paramètre fixé, indépendant de  $\alpha$  et dont l'estimation est d'environ 26 000 t. Par contre, l'effort, noté  $f_{PME}$ , permettant d'atteindre ce résultat dépend de la valeur de  $\alpha$  : les estimations de  $f_{PME}(\alpha=0)$  et  $f_{PME}(\alpha=0,475)$  sont respectivement de l'ordre de 2 300 et 47 000. Dans ces conditions, il semble que la « moins mauvaise » mesure d'aménagement soit l'établissement d'un quota, conclusion à laquelle est également parvenu Fréon (1986).

Avec le modèle {M2}, la PME est une fonction du paramètre  $\alpha$  :  $PME(\alpha) = (1-\alpha) \cdot PME(\alpha=0)$ . Lorsque  $\alpha=0$ , l'estimation de la PME est de l'ordre de 41 000 t, soit environ deux fois plus que la valeur 22 400, obtenue pour  $\alpha=0,453$ . Les valeurs correspondantes des efforts  $f_{PME}$  sont respectivement 3 460 et 36 770. Dans ces conditions, la fixation de quotas est peut-être moins intéressante, mais il est très délicat de déterminer dans quelle situation on se trouve à un moment donné.

Il faut insister sur le fait que, si le scénario proposé ici est plausible, les valeurs estimées des paramètres, en particulier  $\alpha$ , ne doivent pas être considérées comme très fiables. En partant du modèle de Schaefer, nous imposons une forme au renouvellement de la population qui est peut-être fautive. Nous avons vu qu'on peut, en jouant sur le paramètre  $m$  de l'équation de Pella et Tomlinson, obtenir des relations à l'équilibre analogues à celles obtenues en faisant varier le paramètre  $\alpha$  dans les équations (1) et (2). L'estimation de ce paramètre est donc influencée par l'hypothèse  $m=2$ .

De même, la forme de la relation entre le paramètre  $\alpha$  et le débit des fleuves est discutable.

Tableau 2. — Résultats des ajustements obtenus avec les modèles {M1} et {M2}; PME : prise maximale à l'équilibre.

Results of adjustments made with {M1} and {M2} models; PME: maximum sustainable yield (MSY).

Modèle		PME (t)	$q$ $10^{-4}$	$\alpha$	$\Sigma$ carrés $10^8$	% Variance expliquée	Hypothèse
{M1}	estimation	26 235	1,51	0,475	7,01	92	$B_0 = B_p$
	écart-type	1 420	0,21	0,043			
	estimation	27 096	1,70	0,452	8,12	91	$B_0 = \alpha \cdot B_p$ $+ B_p \cdot (1 - \alpha)/2$
	écart-type	1 408	0,28	0,047			
{M2}	estimation	41 006	1,57	0,453	6,65	92	$B_0 = B_p$
	écart-type	4 125	0,21	0,043			
	estimation	40 537	1,79	0,414	7,53	91	$B_0 = \alpha \cdot B_p$ $+ B_p \cdot (1 - \alpha)/2$
	écart-type	4 154	0,28	0,037			

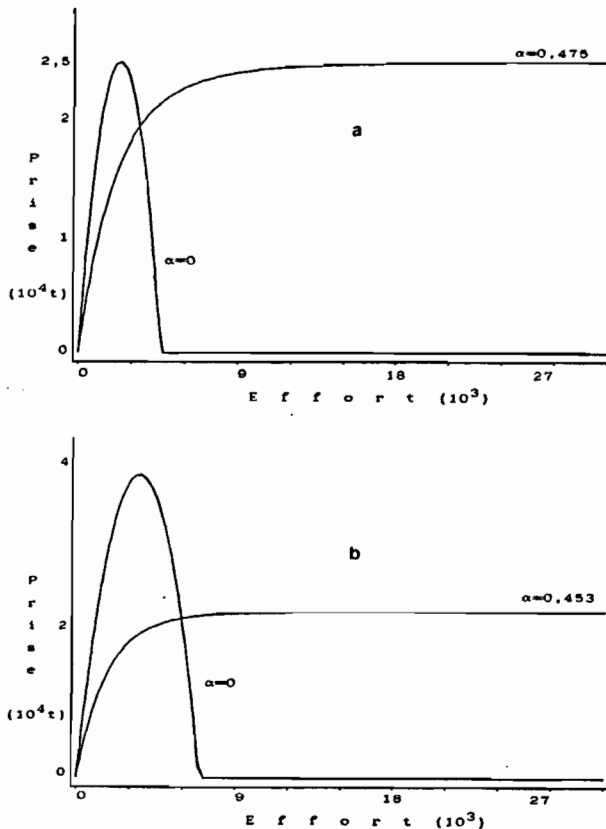


Figure 4. — Relations à l'équilibre entre prises et efforts standardisés obtenues sous l'hypothèse  $B_0 = B_p$  selon que toute la biomasse est accessible ou non: (a) Modèle {M1}; (b) Modèle {M2}.

Equilibrium Catch Effort relationships under  $B_0 = B_p$  when biomass is totally accessible or not: (a) Model {M1}; (b) Model {M2}.

L'impact de l'upwelling sur la dynamique du stock ne peut guère être contesté (ORSTOM, 1976; Binet, 1982; Fréon, 1986; Cury et Roy, 1987). La corrélation négative observée entre le débit des fleuves et l'upwelling (Binet, 1982) permet peut-être, pour la période étudiée, de disposer de l'ensemble de l'information importante avec une seule des deux variables, mais alors, et même s'il existe un effet seuil dans une relation générale entre  $\alpha$  et les conditions environnementales, il serait très dangereux de conclure à partir

des seuls résultats exposés ici que ce seuil peut être déterminé à partir du seul débit des fleuves.

Enfin, les données récentes disponibles sur les captures en indiquent une forte augmentation, incompatible avec une valeur de PME inférieure à 50 000 t en période « normale ». Nous ne disposons pas actuellement de données d'efforts standardisés après 1980, mais il semble que l'aire de répartition du stock se soit modifiée et que des individus de 3 ans soient apparus en nombre dans les captures (Marchal, comm. pers.). Dans ces conditions, la dynamique même du stock s'est modifiée et les modèles donnant des résultats « satisfaisants » jusqu'en 1980 ne peuvent guère être utilisés pour sa description ultérieure.

## CONCLUSION

Il a donc été possible de décrire, d'une manière simple, c'est-à-dire avec peu de paramètres et une formulation facilement interprétable, le phénomène d'augmentation brutale des captures et celui de la reconstitution du stock accompagné de faibles captures les années suivantes.

L'apport de la formulation utilisée ici est de permettre une traduction d'une hypothèse en termes de modification de la forme du modèle sous-jacent de dynamique du stock, ce qui n'était guère possible avec les formulations classiques des modèles globaux; mais nous n'avons pas pu, avec les données traitées ici, choisir entre des formulations qui conduisent à des conclusions très différentes en matière d'aménagement.

Lors des ajustements tentés pour décrire les paramètres du modèle global généralisé (Pella et Tomlinson, 1969; Fox, 1975; Rivard et Bledsoe, 1978) on peut estimer tous les paramètres du modèle. En général, les estimateurs de  $B_0$ ,  $B_p$  et  $m$  sont très peu précis, ce qui conduit souvent à les fixer préalablement à partir des connaissances biologiques acquises. Dans ces conditions, il n'est pas surprenant que nos tentatives d'ajustement, à partir de données issues d'autres pêcheries, avec les modèles régis par les équations (1) et (2) aient conduit à des estimations très imprécises du paramètre  $\alpha$  lorsque celui-ci est supposé être resté

constant sur toute la période. Ces formulations ne devraient donc être utilisées que lorsqu'elles sont étayées par des connaissances biologiques et écologiques solides, indiquant qu'il y a pu avoir, au cours de l'histoire de la pêcherie, une variation de l'accessibilité du stock, modélisable par une variation d'une quantité de biomasse inaccessible. Dans le cas présenté ici, le « moteur » de cette variabilité est l'environnement, qui affecte les résultats d'une pêcherie à rayon d'action limité. Cette modélisation pourrait

donc être utile pour la description des pêches artisanales qui exercent leur activité dans des conditions de milieu très variables.

Il se peut également que la variation de quantité de biomasse inaccessible soit le fait des pêcheurs eux-mêmes, lorsqu'ils ont la possibilité d'accroître l'aire de pêche pour augmenter, ou maintenir, leurs rendements. Ceci peut alors concerner des pêcheries industrielles comme la pêche thonière dans l'Atlantique Centre Est (Laloë, 1987).

#### Remerciement

Je remercie D. Binet et P. Fréon pour les fructueuses remarques faites à la lecture du manuscrit.

#### ANNEXE

##### Les formules

$$dB_t/dt = H \cdot (1 - \alpha) \cdot B_t \cdot (B_t - B_p) - q \cdot f_t \cdot (B_t - \alpha \cdot B_p) \quad (1)$$

et

$$dB_t/dt = H \cdot B_t \cdot (B_t - B_p) - q \cdot f_t \cdot (B_t - \alpha \cdot B_p) \quad (2)$$

sont analogues et les résultats décrits ci-dessous pour l'équation (2) peuvent être généralisés à l'équation (1) en remplaçant :

$$H \text{ par } H(\alpha) = H \cdot (1 - \alpha), \quad (H \text{ devient } H(\alpha = 0))$$

#### 1 — Recherche des relations prise-effort et PUE-effort à l'équilibre

A l'équilibre l'équation (2) peut s'écrire :

$$0 = dB_t/dt = H \cdot B_t^2 - (H \cdot B_p + q \cdot f_t) \cdot B_t + q \cdot f_t \cdot \alpha \cdot B_p$$

$dB_t/dt$  s'écrit donc sous la forme d'un polynôme de degré 2 en  $B_t$ . Plusieurs cas se présentent selon les valeurs prises par  $\alpha$ .

##### 1) $\alpha \in [0, 1]$

Le discriminant  $\Delta$  du polynôme de degré 2 en  $B_t$  est égal à

$$\Delta = (-H \cdot B_p - q \cdot f_t)^2 - 4 \cdot H \cdot \alpha \cdot B_p \cdot q \cdot f_t$$

$\Delta$  est strictement positif puisque  $H$  est négative. Il existe donc deux valeurs d'équilibre,  $B_1$  et  $B_2$

$$B_1 = (H \cdot B_p + q \cdot f_t - \sqrt{\Delta}) / (2 \cdot H)$$

$$B_2 = (H \cdot B_p + q \cdot f_t + \sqrt{\Delta}) / (2 \cdot H)$$

Comme  $-4 \cdot H \cdot \alpha \cdot B_p \cdot q \cdot f_t$  est positif,  $\sqrt{\Delta} > |H \cdot B_p + q \cdot f_t|$  et comme  $H < 0$  alors :

$$B_1 > 0 \quad \text{et} \quad B_2 < 0.$$

$B_1$  est supérieure à  $\alpha \cdot B_p$  car lorsque  $B_t = \alpha \cdot B_p$ ,  $dB_t/dt = B_p^2 \cdot H \cdot \alpha \cdot (\alpha - 1)$  est positif;  $dB_t/dt$  étant négatif lorsque  $B_t \rightarrow \infty$ , la racine positive  $B_1$  est comprise entre  $\alpha \cdot B_p$  et l'infini. De plus  $B_1$  est une situation d'équilibre stable. Il s'ensuit que, quelque soit l'effort appliqué, si la biomasse initiale est supérieure à 0 et si on impose que la capture est nulle tant que  $B_t$  est inférieure à  $\alpha \cdot B_p$ , la biomasse finira par dépasser cette valeur et ne pourra pas redescendre en deçà.

##### 2) $\alpha = 0$

On a alors le modèle de Graham-Schaefer (Graham, 1935; Schaefer, 1954).

##### 3) $\alpha < 0$

Ce cas est à première vue absurde, mais en considérant l'équation générale du modèle, on observe qu'en posant :

$$q' \cdot B_t = q \cdot (B_t - \alpha \cdot B_p),$$

on a :

$$q' = q \cdot (1 - \alpha \cdot B_p / B_t) \quad (A-1)$$

on a donc introduit une relation entre capturabilité et biomasse totale si on raisonne à partir de celle-ci. Lorsque  $\alpha > 0$  la capturabilité décroît avec la biomasse et s'annule lorsque celle-ci est égale à  $\alpha \cdot B_p$ . Il est logique d'envisager le cas où  $\alpha$  est négatif si la relation est dans le sens contraire; cela a été observé par MacCall (1976) pour une pêcherie de *Sardina caerulea* en Californie et Ulltang (1980) a décrit un certain nombre de phénomènes conduisant à ce résultat. Dans ce cas la valeur du discriminant  $\Delta$  peut être négative pour certaines valeurs de  $f$ . On a :

$$\Delta = (-q \cdot f - H \cdot B_p)^2 - 4 \cdot H \cdot \alpha \cdot B_p \cdot q$$

$$\Delta = q^2 \cdot f^2 + f \cdot (-4 \cdot H \cdot \alpha \cdot B_p \cdot q + 2 \cdot H \cdot B_p \cdot q) + H^2 \cdot B_p^2$$

le discriminant  $\Delta'$  de cette équation du second degré en  $f$  est égal à :

$$\Delta' = (q \cdot H \cdot B_v)^2 \cdot [-4 + (2 - 4 \cdot \alpha)^2]$$

$$\Delta' = (4 \cdot q \cdot H \cdot B_v)^2 \cdot [-\alpha \cdot (1 - \alpha)]$$

comme  $\alpha < 0$  on a donc  $\Delta' > 0$ .

Il y a donc deux racines réelles  $f_1$  et  $f_2$  à l'équation, ces racines sont positives puisque le coefficient du monôme de degré 1 en  $f$  est négatif et que ceux des monômes de degré 0 et 2 sont positifs.

$$f_1 = [H \cdot B_v / (2 \cdot q)] \cdot [-2 + 4 \cdot \alpha + 4 \sqrt{\alpha \cdot (\alpha - 1)}]$$

$$f_2 = [H \cdot B_v / (2 \cdot q)] \cdot [-2 + 4 \cdot \alpha - 4 \sqrt{\alpha \cdot (\alpha - 1)}]$$

Lorsque  $\alpha$  est négatif il y a possibilité d'extinction de la biomasse. Dans la pratique, lorsqu'on trouvera une valeur négative pour  $\alpha$ , on utilisera des approximations en prenant de courts intervalles de temps pour calculer les biomasses au temps  $t + \delta_t$ , en fonction de la biomasse au temps  $t$  :

$$B_{t+\delta_t} = B_t + [B_t \cdot H \cdot (B_t - B_v) - q \cdot f \cdot (B_t - \alpha \cdot B_v)] \cdot \delta_t$$

De toute façon, le fait de trouver une valeur négative pour  $\alpha$  devrait conduire à rejeter l'utilisation de ce modèle au profit du modèle global généralisé, ou d'un modèle supposant une relation entre biomasse et capturabilité, ou encore à imposer  $\alpha = 0$  ce qui ramène au modèle de Graham-Schaefer.

Les relations à l'équilibre entre prise et effort lorsque le paramètre  $\alpha$  varie pour les équations (1) et (2) sont présentées sur la figure 1 (b et c). On constate qu'elles sont assez proches de celles issues du modèle global généralisé (Pella et Tomlinson, 1969) lorsque le coefficient  $m$  varie (fig. 1 a). Une valeur positive de  $\alpha$  donne une relation du type  $m < 2$ , et une valeur négative de  $\alpha$  donne une relation du type  $m > 2$ . Lorsque  $\alpha = 0$ , on a le modèle global généralisé avec  $m = 2$ . Ces résultats sont analogues à ceux donnés par Fox (1974) concernant l'allure des relations prises-efforts dans un modèle de Schaefer lorsqu'on introduit une relation entre capturabilité et biomasse.

## 2 - Détermination de PME et $f_{PME}$

Lorsque l'équilibre est atteint pour un effort  $f$  donné et si on continue d'appliquer cet effort pendant une période de durée unitaire, la prise effectuée sera  $P = q \cdot f \cdot (B - \alpha \cdot B_v)$ . L'équilibre étant réalisé on a :

$$0 = B \cdot H \cdot (B - B_v) - P = H \cdot B^2 - B \cdot (H \cdot B_v) - P$$

si il existe une valeur  $B$  satisfaisant cette équation, le discriminant  $(H \cdot B_v)^2 + 4 \cdot H \cdot P$  est positif, ou nul; comme  $H$  est négatif, on en déduit :

$$P \leq -H \cdot B_v^2 / 4 \quad (2)$$

et

$$P \leq -H \cdot (1 - \alpha) \cdot B_v^2 / 4 \quad (1)$$

on peut alors rechercher si il existe une valeur d'effort telle que

$$P = -H \cdot B_v^2 / 4$$

Il faut alors

$$-H \cdot B_v^2 / 4 - H \cdot B \cdot (B - B_v) = 0$$

soit :

$$H \cdot (B - B_v / 2)^2 = 0$$

on obtient donc  $B = B_v / 2$ , ce qui n'est réalisable que si  $\alpha < 0,5$  et :

$$q \cdot f \cdot B_v \cdot (0,5 - \alpha) = -H \cdot B_v^2 / 4$$

soit

$$f_{PME} = -H \cdot B_v / (2 \cdot q \cdot (1 - 2 \cdot \alpha)) \quad (2)$$

et

$$f_{PME} = -H \cdot (1 - \alpha) \cdot B_v / (2 \cdot q \cdot (1 - 2 \cdot \alpha)) \quad (1)$$

On remarquera que dans l'équation (1), la valeur  $f_{PME}(\alpha)$  pour une valeur quelconque de  $\alpha$  est égale à  $f_{PME}(\alpha = 0)$  multiplié par :

$$(1 - \alpha) / (1 - 2 \cdot \alpha)$$

valeur qui est supérieure à 1 si  $\alpha$  est strictement positif. La valeur  $f_{PME}(\alpha > 0)$  est donc supérieure à  $f_{PME}(\alpha = 0)$ .

Si on utilise la relation  $PME = 0,5 \cdot M \cdot B_v$  où  $M$  est la mortalité naturelle (Gulland, 1971), on obtient pour  $\alpha = 0$  :

$$PME = q \cdot f_{PME} \cdot B_v / 2 = M \cdot B_v / 2$$

donc

$$q = M / f_{PME}$$

ou

$$f_{PME} = M / q$$

On retrouve les résultats classiques du modèle de Graham-Schaefer : lorsque  $\alpha = 0$ . Si  $\alpha = 0,5$ , la prise tend vers  $-H(\alpha) \cdot B_v^2 / 4$  lorsque l'effort tend vers l'infini. Si  $\alpha$  est plus grand que 0,5, la prise à l'équilibre est une fonction croissante de l'effort et tend vers  $H(\alpha) \cdot B_v \cdot [\alpha \cdot (\alpha - 1)]$  lorsque l'effort tend vers l'infini.

En fait ces résultats sont logiques si on considère que le renouvellement de la biomasse s'effectue selon la formulation du modèle de Schaefer et qu'à un niveau donné de biomasse à l'équilibre, qui dépend de la capture, cette dernière est la même que celle issue du modèle de Schaefer. Si  $\alpha$  est plus petit que 1/2, la biomasse peut atteindre la valeur  $B_v / 2$  et la prise la valeur maximum de  $-H(\alpha) \cdot B_v^2 / 4$ .



## 3 — Intégration de l'équation différentielle

Nous avons vu que  $dB_t/dt$  est un polynôme du second degré en  $B_t$  et lorsque des racines réelles existent pour cette équation on peut trouver facilement  $B_t$  en fonction de  $f_t$  lorsque celui est resté constant par intervalles.

Soient  $r_1$  et  $r_2$  ( $r_1 > r_2$ ) les racines de l'équation lorsqu'elles existent; si l'effort est resté constant entre  $t=0$  et  $t+t_1$ , lorsque  $t < t_1$ , et si  $B_0$  est différent de  $r_1$  et de  $r_2$  on a (voir par exemple Jolivet, 1983, p. 52 et suivantes) :

$$\text{Log}|B_t - r_1| - \text{Log}|B_t - r_2| = H \cdot (r_1 - r_2) \cdot t + c$$

où

$$c = \text{Log}|B_0 - r_1| - \text{Log}|B_0 - r_2|.$$

On en déduit donc la valeur de  $B_t$  en fonction des valeurs de  $B_0$  et  $f$ . Si  $B_0$  est égal à l'une des racines,  $B_t = B_0$ .

Si il n'existe pas de racine à l'équation, on procède par approximations (voir plus haut).

Il peut se produire que la biomasse puisse être inférieure à  $\alpha \cdot B_v$ , dans ce cas, on considérera que la capturabilité est nulle (ce que nous ferons techniquement en imposant  $f=0$ ). Si la biomasse devient nulle au temps  $t_0$ , on impose  $B_t=0$  si  $t > t_0$ . Rappelons toutefois que si  $\alpha > 0$  et si  $B_0 > \alpha \cdot B_v$ , alors la biomasse reste toujours supérieure à cette valeur quelque soit l'effort exercé.

Nous avons écrit un programme pour effectuer l'ajustement de ce modèle en recherchant quelle combinaison de paramètre PME,  $B_v$ ,  $B_0$ ,  $q$  et  $\alpha$  conduisent à minimiser un critère du type « moindres carrés », soit

$$\sum_i (P_i - \hat{P}_i)^2$$

(utilisé par Pella et Tomlinson, 1969), soit

$$\sum_i [(P_i - \hat{P}_i) / \hat{P}_i]^2$$

(utilisé par Rivard et Bledsoe, 1978), où  $P_i$  et  $\hat{P}_i$  sont les captures observées et ajustées.

Le programme est écrit avec le progiciel « Genstat » (Rothamsted experimental station, Harpenden, Grande-Bretagne) et utilise l'algorithme de Marquardt (1963).

Pour le calcul des prises ajustées, chaque période (année ici) au cours de laquelle l'effort est supposé constant est décomposée en  $n$  sous-périodes de durées égales. Si la biomasse au début de l'année  $i$  est  $B_{i,0}$ , on calcule les valeurs des biomasses  $B_{i,1}, B_{i,2}, \dots, B_{i,n}$  ( $B_{i,n} = B_{i+1,0}$ ) à la fin de chaque sous-période. La

prise ajustée est alors calculée par :

$$\hat{P}_i = \left[ \sum_{j=0}^n q \cdot f \cdot (B_{i,j} - \alpha \cdot B_v) \right] / (n+1)$$

avec la contrainte  $q=0$  si  $B_{i,j} < \alpha \cdot B_v$ .

Plus  $n$  est grand et plus la valeur de la prise ajustée est proche de :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} q \cdot f \cdot (B_t - \alpha \cdot B_v) \cdot dt$$

et plus le temps de calcul augmente, choisir  $n=1$  revient à supposer que la variation de biomasse a été linéaire au cours de la période. Nous avons fait les calculs avec  $n=5$  ce qui paraît être un bon compromis.

## RÉFÉRENCES

- Binet D., 1982. Influence des variations climatiques sur la pêcherie des *Sardinella aurita* ivoiro-ghanéennes : relation sécheresse-surpêche. *Oceanol. Acta*, 5, 443-452.
- Cury P., C. Roy, 1987. Upwelling et pêche des espèces pélagiques côtières de Côte-d'Ivoire : une approche globale. *Oceanol. Acta*, 10, 347-357.
- FAO, 1980. Rapport du groupe de travail *ad hoc* sur les sardinelles de Côte-d'Ivoire-Ghana-Togo. *COPACE/PACE*, série 80/21 (fr.), FAO, Rome, 73 p.
- Fox W. W., 1970. An exponential surplus yield model for optimizing exploited fish population. *Trans. Am. Fish. Soc.*, 99, 80-88.
- , 1974. An overview of production modelling. ICCAT workshop on tuna population dynamics, Nantes, France. *Rec. Doc. Sci. CICTA*, 3, 142-156.
- , 1975. Fitting the generalized stock-production model by least square and equilibrium approximation. *Fish. Bull. U.S.*, 73, 23-37.
- Fréon P., 1986. Réponses et adaptations des stocks de clupéidés d'Afrique de l'Ouest à la variabilité du milieu et de l'exploitation. Analyse et réflexion à partir de l'exemple du Sénégal. Thèse dr. État, Univ. Aix-Marseille, 241 p.
- Garrod D. J., 1969. Empirical assessments of catch effort relationship in the North Atlantic cod stocks. *Res. Bull. ICNAF*, 6, 26-34.
- Graham M., 1935. Modern theory of exploiting a fishery, and application to North Sea trawling. *J. Cons. Int. Explor. Mer*, 10, 264-274.
- Gulland J., S. Garcia, 1984. Observed patterns in multispecies fisheries. In: *Exploitation of marine communities*, R. M. May ed. Dahlem Konferenzen, Springer-Verlag, 155-190.
- Laloë F., 1987. A simple production model with unaccessed quantity of biomass. ICES, 9-16 June 1987.

- Laurec A., J. C. Le Guen, 1981. Dynamique des populations marines exploitées. CNEXO, *Rapp. sci. tech.*, **45**, 117 p.
- MacCall A. D., 1976. Density dependance of catchability coefficient in the California Pacific sardine (*Sardinops caerulea*) purse seine fishery. *Calif. Coop. Ocean Fish. Invest. Rep.*, **18**, 136-148.
- Marchesseault G. D., S. D. Saila, W. J. Palm, 1976. Delayed recruitment models and their application to the american lobster (*Homarus americanus*) fishery. *J. Fish. Res. Board Can.*, **33**, 1779-1787.
- Marquardt D. W., 1963. An algorithm for least squares estimation of non linear parameters. *SIAM J.*, **11**, 431-441.
- ORSTOM, 1976. Rapport du groupe de travail sur la sardinelle des côtes ivoiro-ghanéennes, Fishery Research Unit Tema, Centre de Recherches Océanographiques Abidjan, ORSTOM, 62 p.
- Pella J. J., P. K. Tomlinson, 1969. A generalized stock production model. *Bull. IATTC*, **13**, 419-496.
- Rivard D., L. J. Bledsoe, 1978. Parameter estimation for the Pella-Tomlinson stock production model under non equilibrium conditions. *Fish. Bull. U.S.*, **76**, 523-534.
- Schaefer M. B., 1954. Some aspects of the dynamics of population important to the management of the commercial marine fisheries. *Bull. Int. Am. Trop. Tuna Comm.*, **1**, 26-56.
- , 1957. A study of the dynamics of the fishery for yellow-fin tuna in the Eastern Tropical Pacific Ocean. *Bull. Int. Am. Trop. Tuna Comm.*, **2**, 247-285.
- Ulltang O., 1980. Factors affecting the reaction of pelagic fish stocks to exploitation and requiring a new approach to assessment and management. *Rapp. P.-v. Réun. Cons. Int. Explor. Mer*, **177**, 489-504.
- Walter G. G., 1973. Delay differential equation models for fisheries. *J. Fish. Res. Board Can.*, **30**, 939-945.